第27卷 第5期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 5
2010年10月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0873-10

模糊逻辑系统中公式的积分真度和伪距离*

崔美华

(盐城师范学院数学科学学院，盐城 224051)

摘　要: 在赋值格为 $[0,1]$ 的模糊逻辑系统 $\mathscr{L}^*$ 中，本文利用序结构和赋值函数的性质研究公式的积分真度和伪距离，导出了积分真度和伪距离的若干性质，并且给出了在逻辑度量空间中逻辑运算关于伪距离均连续这一重要定理的简洁证明。该方法避开了多重积分的复杂计算；研究结果不仅可以用于公式的积分真度和伪距离的简化计算或合理估值，而且拓宽了逻辑度量空间理论的发散度与相容度以及近似推理的研究思路。

关键词: 逻辑系统 $\mathscr{L}^*$；公式；积分真度；伪距离

分类号: **AMS**(2000) 03B50　　**中图分类号**: O141.1; O153.1　　**文献标识码**: A

1　引言

计量逻辑学理论[1-4] 的基本内容是在命题逻辑系统中引进公式的真度理论，并在此基础上提出公式间的相似度和伪距离概念，进而研究逻辑度量空间的基本性质、逻辑理论的发散度与相容度及近似推理的模式。所以公式的真度及公式间的伪距离是计量逻辑学研究的主要问题之一[1]。文献 [3-5] 已经分别研究了二值命题逻辑系统L、多值Lukasiewicz命题逻辑系统Ln、以及赋值格为 $[0,1]$ 的模糊逻辑系统Luk中公式的真度理论及近似推理，但对赋值格为 $[0,1]$ 的模糊逻辑系统 $\mathscr{L}^*$ 中的积分真度及伪距离至今尚未有具体的研究，而Luk中有关积分真度的理论并不能直接推广到 $\mathscr{L}^*$ 中。因为：在模糊逻辑系统中，蕴涵算子 $R(a,b)=a\to b$ 是一个 $[0,1]^2\to[0,1]$ 的二元函数，不同的蕴涵算子对应着不同的模糊逻辑系统。逻辑系统Luk、$\mathscr{L}^*$ 的蕴涵算子分别为

$$R_{\rm Lu}(a,b)=(1-a+b)\wedge 1,\quad R_0(a,b)=\begin{cases}1, & a\le b,\\ \neg a\vee b, & a>b,\end{cases}$$

显然有 $R_{\rm Lu}(a,b)\ge R_0(a,b)$；在Luk中，$A\vee B$ 表示 $(A\to B)\to B$，在 $\mathscr{L}^*$ 中，$A\vee B$ 并不表示 $(A\to B)\to B$，而是与 $((A\to B)\to B)\wedge((B\to A)\to A)$ 等价；特别是在Luk中，$\rho(A,B)=d(A,B)$，文献 [5] 利用自然距离 $d(A,B)$ 的相关性质证明了逻辑度量空间 $(F(S),\rho)$ 中逻辑运算均连续的重要定理，而在 $\mathscr{L}^*$ 中，$\rho(A,B)\neq d(A,B)$，所以Luk中的有关积分真度理论在 $\mathscr{L}^*$ 中不一定成立。因此，有必要对赋值格为 $[0,1]$ 的模糊逻辑系统 $\mathscr{L}^*$ 中的积分真度理论进行深入细致的研究。本文将在 $\mathscr{L}^*$ 中利用序结构知识和赋值函数保持“$\neg$”，“$\to$”，“$\vee$”，“$\wedge$”，“$\oplus$”，“$\otimes$”运算不变的性质，避开 n 重积分的复杂计算，不仅导出与文献 [5] 中关于逻辑系统Luk中公式的真度及伪距离的许多类似的结论，而且推出关于真度及伪距离的若干新性质，特别是关于运算“$\oplus$”，“$\otimes$”的性质，并由这些性质直接给出在逻辑度量空间中逻

收稿日期: 2009-05-31.　**作者简介**: 崔美华 (1956年11月生)，女，副教授. 研究方向：模糊逻辑与近似推理.

***基金项目**: 江苏省高校自然科学基础研究项目 (08KJD110008).

辑运算“$\neg$”，“$\to$”，“$\vee$”，“$\wedge$”，“$\oplus$”，“$\otimes$”关于伪距离均连续这一重要定理的简洁证明。这些性质不仅为 $\mathscr{L}^*$ 中公式的积分真度及伪距离的简化计算或合理估值提供了可能，而且为研究逻辑度量空间理论的发散度与相容度以及近似推理拓宽了思路。

文中所引用的概念、符号及性质，若未加说明，均参见文献[3,5]。$[0,1]$ 上的蕴涵算子取 R_0 算子。

设 $A=f(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in F(S)$，$R$ 是 $[0,1]$ 上的蕴涵算子，$v:F(S)\to[0,1]$ 是关于 R 而言的赋值，以 Ω_R 记作全体赋值之集。$v(A)=\overline{f}(v(p_1),v(p_2),\cdots,v(p_n))$，由于 $v(p_i)\,(1\le i\le n)$ 可取 $[0,1]$ 中的任意值，所以当 v 在赋值集 Ω_R 中变化时就有与 A 对应的 n 元函数 $\overline{f}:[0,1]^n\to[0,1]$，并以 $\overline{A}$ 记 $\overline{f}$。

定义 1.1[2] 设 $F(S)$ 是由 $S=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 生成的 $(\neg,\vee,\to)$ 型自由代数，在 $F(S)$ 中，用 $A\wedge B$ 表示 $\neg(\neg A\vee\neg B)$；用 $A\oplus B$ 表示 $\neg A\to B$；用 $A\otimes B$ 表示 $\neg(A\to\neg B)$。

引理 1.1[2] 设 $A,B\in F(S)$, $v\in\Omega_R$，则

$v(\neg A)=\neg v(A)$, $\qquad v(A\to B)=v(A)\to v(B)$,

$v(A\vee B)=v(B\vee A)=v(A)\vee v(B)$, $\qquad v(A\wedge B)=v(B\wedge A)=v(A)\wedge v(B)$,

$v(A\oplus B)=v(B\oplus A)=v(A)\oplus v(B)$, $\qquad v(A\otimes B)=v(B\otimes A)=v(A)\otimes v(B)$。

引理 1.2[5] 设 $A,B,C\in F(S)$，则在模糊逻辑系统 $\mathscr{L}^*$ 中有

(i) $\neg A\to\neg B\approx B\to A$;

(ii) $A\to(B\to C)\approx B\to(A\to C)$;

(iii) $A\to B\wedge C\approx(A\to B)\wedge(A\to C)$;

(iv) $A\to B\vee C\approx(A\to B)\vee(A\to C)$;

(v) $A\vee B\to C\approx(A\to C)\wedge(B\to C)$;

(vi) $A\wedge B\to C\approx(A\to C)\vee(B\to C)$;

(vii) $A\vee B\approx((A\to B)\to B)\wedge((B\to A)\to A)$。

2 公式的积分真度

定义 2.1[5] 设 $A=A(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in F(S)$，$R$ 是蕴涵算子，则称 n 重积分

$$\tau_R(A)=\int_{[0,1]^n}\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

为公式 A 的 R-积分真度。当 R 取 $\mathscr{L}^*$ 蕴涵算子 R_0 时，略去下标 R，并简记为

$$\tau(A)=\int_{\triangle}\overline{A}\,\mathrm{d}\omega.$$

由定义 2.1 易得如下基本结论：$0\le\tau(A)\le 1$；若 A 为重言式，则 $\tau(A)=1$；$\tau(A)=0$ 当且仅当 A 为矛盾式；

$$\tau(\neg A)=1-\tau(A),\quad \tau(A\otimes\neg A)=0,\quad \tau(A\oplus\neg A)=1,\quad \tau(A\vee B)\ge\tau(A)\vee\tau(B),$$

$$\tau(A\wedge B)\le\tau(A)\wedge\tau(B),\quad \tau(A\vee B)\le\tau((A\to B)\to B).$$

引理 2.1[2] 设 $A,B,C\in F(S)$，$\alpha,\beta\in[0,1]$，则

(i) 若 $A\approx B\ (A\sim B)$，则 $\tau(A)=\tau(B)$；

(ii) $\tau(A\vee B)+\tau(A\wedge B)=\tau(A)+\tau(B)$；

(iii) 若 $\tau(A) \geq \alpha$，$\tau(A \to B) \geq \beta$，则 $\tau(B) \geq \alpha + \beta - 1$；
(iv) 若 $\tau(A \to B) \geq \alpha$，$\tau(B \to C) \geq \beta$，则 $\tau(A \to C) \geq \alpha + \beta - 1$；
(v) 若 $|- A \to B$，则 $\tau(A) \leq \tau(B)$。

命题 2.1　设 $A, B, C \in F(S)$，则
(i) $\tau(A \to (A \oplus B)) = 1$；$\tau((A \otimes B) \to A) = 1$；$\tau(A \to B \to (A \otimes B)) = 1$；
(ii) $\tau((A \otimes B) \to C) = \tau(A \to (B \to C))$；
(iii) $\tau(A \otimes (B \vee C)) = \tau((A \otimes B) \vee (A \otimes C))$，$\tau(A \otimes (B \wedge C)) = \tau((A \otimes B) \wedge (A \otimes C))$；
(iv) $\tau(A \oplus (B \vee C)) = \tau((A \oplus B) \vee (A \oplus C))$，$\tau(A \oplus (B \wedge C)) = \tau((A \oplus B) \wedge (A \oplus C))$；
(v) $\tau(A \otimes B) \leq \tau(A \wedge B) \leq \tau(A \vee B) \leq \tau(A \oplus B)$。

证明　由定义 1.1，引理 1.2 及 $A \to (B \to A)$ 是 $\mathscr{L}^*$ 中定理得到，命题 2.1 (i) 的证明如下

$$\begin{aligned}\tau(A \to (A \oplus B)) &= \tau(A \to (\neg A \to B)) \\ &= \tau(\neg A \to (A \to B)) = \tau(\neg A \to (\neg B \to \neg A)) = 1, \\ \tau((A \otimes B) \to A) &= \tau(\neg(A \to \neg B) \to A) \\ &= \tau(\neg A \to (A \to \neg B)) = \tau(A \to (\neg A \to \neg B)) = \tau(A \to (B \to A)) = 1, \\ \tau(A \to (B \to (A \otimes B))) &= \tau(A \to (B \to \neg(A \to \neg B))) \\ &= \tau(A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)) = \tau((A \to \neg B) \to (A \to \neg B)) = 1.\end{aligned}$$

由定义 1.1 和引理 2.1 (i) 易得命题 2.1 (ii)-(iv)。

因为 $v(A \otimes B) \leq v(A \wedge B)$ 对任意的赋值 v 都成立，所以 $\overline{A \otimes B} \leq \overline{A \wedge B}$，因此 $\tau(A \otimes B) \leq \tau(A \wedge B)$。类似可得 $\tau(A \oplus B) \geq \tau(A \vee B)$。于是有

$$\tau(A \otimes B) \leq \tau(A \wedge B) \leq \tau(A \vee B) \leq \tau(A \oplus B).$$

所以命题 2.1 (v) 得证。

命题 2.2　设 $A, B, C \in F(S)$，$\alpha, \beta \in [0,1]$，则
(i) $\tau(A \to B) \leq \tau(A \wedge B) - \tau(A) + 1$；
(ii) $\tau(A \wedge B) \geq \tau(A) + \tau(B) - 1$；
(iii) 若 $\tau(A \to B) \geq \alpha$，$\tau(A \to C) \geq \beta$，则 $\tau(A \to B \wedge C) \geq \alpha + \beta - 1$。

证明　命题 2.2 (i) 的证明：设 $v(A) = \overline{A} = a$，$v(B) = \overline{B} = b$，则 $a, b \in [0,1]$。对于 R_0 蕴涵算子，当 $a \leq b$ 时，

$$a \to b = 1, \quad a \wedge b - a + 1 = a - a + 1 = 1.$$

当 $a > b$ 时，

$$a \to b = (1-a) \vee b, \quad a \wedge b - a + 1 = b + 1 - a \geq \max\{(1-a), b\}.$$

于是有 $a \to b \leq a \wedge b - a + 1$，所以

$$\begin{aligned}\tau(A \to B) &= \int_{\triangle} (\overline{A} \to \overline{B}) \mathrm{d}\omega \leq \int_{\triangle} (\overline{A} \wedge \overline{B}) \mathrm{d}\omega - \int_{\triangle} \overline{A} \mathrm{d}\omega + \int_{\triangle} \mathrm{d}\omega \\ &= \tau(A \wedge B) - \tau(A) + 1.\end{aligned}$$

命题 2.2 (ii) 的证明：由引理 2.1 (ii) 得

$$\tau(A \wedge B) = \tau(A) + \tau(B) - \tau(A \vee B) \geq \tau(A) + \tau(B) - 1.$$

命题2.2 (iii) 的证明：由 $A \to B \wedge C \approx (A \to B) \wedge (A \to C)$ 及 (ii) 可得

$$\begin{aligned}\tau(A \to B \wedge C) &= \tau((A \to B) \wedge (A \to C)) \geq \tau(A \to B) + \tau(A \to C) - 1 \\ &= \alpha + \beta - 1.\end{aligned}$$

命题2.3 设 $A, B, C \in F(S)$，则

(i) $\tau(A \vee B \to B \vee C) \geq \tau(A \to B) \vee \tau(A \to C)$；

(ii) $\tau(A \wedge B \to B \wedge C) \geq \tau(A \to B) \vee \tau(B \to C)$；

(iii) $\tau((B \to C) \to (A \to C)) \geq \tau(A \to B) \vee \tau(A \to C)$。

证明 命题2.3 (i) 的证明：$\tau(A \vee B \to B \vee C) = \tau((A \to B \vee C) \wedge (B \to B \vee C))$，由于 $B \to B \vee C$ 是 $\mathscr{L}^*$ 中定理，因此

$$\begin{aligned}\tau(A \vee B \to B \vee C) &= \tau(A \to B \vee C) \\ &= \tau((A \to B) \vee (A \to C)) \geq \tau(A \to B) \vee \tau(A \to C).\end{aligned}$$

类似可证命题2.3 (ii)。

命题2.3 (iii) 的证明：$\tau((B \to C) \to (A \to C)) = \tau(A \to ((B \to C) \to C))$，在 $\mathscr{L}^*$ 中对于 $a, b, c \in [0,1]$，有 $(b \to c) \to c \geq b \vee c$，于是 $a \to ((b \to c) \to c) \geq a \to (b \vee c)$，所以

$$\tau((B \to C) \to (A \to C)) \geq \tau(A \to B \vee C) \geq \tau(A \to B) \vee \tau(A \to C).$$

命题2.4 设 $A_i \in F(S)\,(i = 1, 2, \cdots, n)\,(n \geq 2)$，则

$$\begin{aligned}\tau\Big(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \tau(A_i) + (-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tau(A_i \wedge A_j) \\ &\quad + (-1)^2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \tau(A_i \wedge A_j \wedge A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} \tau\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\Big).\end{aligned}$$

推论2.1 设 $A_i \in F(S)\,(i = 1, 2, \cdots, n)\,(n \geq 3)$，则

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} \tau(A_i) + (-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tau(A_i \wedge A_j) \\ \leq\ & \tau\Big(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \tau(A_i) + (-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tau(A_i \wedge A_j) + (-1)^2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \tau(A_i \wedge A_j \wedge A_k).\end{aligned}$$

推论2.1 可推广到更一般的情形：设 $A_i \in F(S)\,(i = 1, 2, \cdots, n)\,(n \geq 3)$，则

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} \tau(A_i) + (-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tau(A_i \wedge A_j) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{2k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k} \leq n} \tau(A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \cdots \wedge A_{i_{2k}}) \\ \leq\ & \tau\Big(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \tau(A_i) + (-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tau(A_i \wedge A_j) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{2k} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k+1} \leq n} \tau(A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \cdots \wedge A_{i_{2k+1}}), \quad k = 1, 2, \cdots, \Big[\frac{n}{2}\Big],\end{aligned}$$

其中 $[\frac{n}{2}]$ 为 $\frac{n}{2}$ 的取整。

推论 2.2 设 $A_i \in F(S)\,(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\tau\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{n}\tau(A_i) - n + 1.$$

用数学归纳法可证命题2.4和推论2.1、2.2，具体证明可参看文献[6]。

推论 2.3 设 $A, B_i \in F(S)\,(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\tau\Big(A \to \bigwedge_{i=1}^{n} B_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{n}\tau(A \to B_i) - n + 1.$$

证明

$$\begin{aligned}\tau\Big(A \to \bigwedge_{i=1}^{n} B_i\Big) &= \tau\Big\{(A \to B_1) \wedge \Big(A \to \bigwedge_{i=2}^{n} B_i\Big)\Big\}\\ &= \cdots = \tau\Big\{\bigwedge_{i=1}^{n}(A \to B_i)\Big\} \geq \sum_{i=1}^{n}\tau(A \to B_i) - n + 1.\end{aligned}$$

3 公式间的伪距离

定义 3.1 设 A, $B \in F(S)$，规定

$$\rho_R(A,B) = 1 - \int_{\Delta} R(\overline{A},\overline{B}) \wedge R(\overline{B},\overline{A})\,\mathrm{d}\omega.$$

当 R 取 R_0 蕴涵算子时，略去下标 R，即 $\rho(A,B) = 1 - \tau((A \to B) \wedge (B \to A))$。

定理 3.1 $\rho: F(S) \times F(S) \to [0,1]$ 是 $F(S)$ 上的伪距离，称 $(F(S),\rho)$ 为逻辑度量空间。

证明 设 $A, B, C \in F(S)$，由定义3.1和命题2.2 (ii) 及引理2.1 (iv) 可得

定理3.1 (i) 的证明：$\rho(A,A) = 1 - \tau((A \to A) \wedge (A \to A)) = 0$。

定理3.1 (ii) 的证明

$$\rho(A,B) = 1 - \tau((A \to B) \wedge (B \to A)) = 1 - \tau((B \to A) \wedge (A \to B)) = \rho(B,A).$$

定理3.1 (iii) 的证明

$$\begin{aligned}\rho(A,C) &= 1 - \tau((A \to C) \wedge (C \to A))\\ &\leq 1 - [\tau(A \to C) + \tau(C \to A) - 1]\\ &\leq 2 - [\tau(A \to B) + \tau(B \to C) - 1] - [\tau(C \to B) + \tau(B \to A) - 1]\\ &= 4 - [\tau(A \to B) + \tau(B \to A)] - [\tau(B \to C) + \tau(C \to B)].\end{aligned}$$

因为

$$\tau(A \to B) + \tau(B \to A) = \tau((A \to B) \vee (B \to A)) + \tau((A \to B) \wedge (B \to A)),$$

而 $\tau((A \to B) \vee (B \to A)) = 1$，所以

$$\begin{aligned}\rho(A,C) &\leq 1 - \tau((A \to B) \wedge (B \to A)) + 1 - \tau((B \to C) \wedge (C \to B))\\ &= \rho(A,B) + \rho(B,C).\end{aligned}$$

由 (i), (ii), (iii) 定理得证。

命题 3.1 设 A, $B \in F(S)$，则

(i) $\rho(A,B) = 2 - \tau(A \to B) - \tau(B \to A)$。

(ii) $\tau(A \vee B) - \tau(A \wedge B) \le \rho(A,B) \le 2 - \tau(A) - \tau(B)$。

证明 命题 3.1 (i) 的证明如下

$$\begin{aligned}\rho(A,B) &= 1 - \tau((A \to B) \wedge (B \to A)) \\ &= 1 - \tau(A \to B) - \tau(B \to A) + \tau((A \to B) \vee (B \to A)) \\ &= 2 - \tau(A \to B) - \tau(B \to A).\end{aligned}$$

命题 3.1 (ii) 的证明：由 (i) 和及命题 2.2 (i) 得

$$\begin{aligned}\rho(A,B) &= 2 - \tau(A \to B) - \tau(B \to A) \\ &\ge 2 - [\tau(A \wedge B) - \tau(A) + 1] - [\tau(B \wedge A) - \tau(B) + 1] \\ &= \tau(A) + \tau(B) - 2\tau(A \wedge B) \\ &= \tau(A \vee B) - \tau(A \wedge B),\end{aligned}$$

因为 $\tau(A \to B) \ge \tau(B)$，所以

$$\rho(A,B) = 2 - \tau(A \to B) - \tau(B \to A) \le 2 - \tau(B) - \tau(A),$$

因此

$$\tau(A \vee B) - \tau(A \wedge B) \le \rho(A,B) \le 2 - \tau(A) - \tau(B).$$

推论 3.1 设 $A, T, \overline{0} \in F(S)$，其中 T 为重言式，$\overline{0}$ 为矛盾式，则

$$\rho(A,T) = 1 - \tau(A), \quad \rho(A,\overline{0}) = \tau(A).$$

推论 3.2 设 A, $B \in F(S)$，若 $\rho(A,B) = 0$，则 $\tau(A) = \tau(B)$。

证明 由

$$\rho(A,B) = 2 - \tau(A \to B) - \tau(B \to A) = 0,$$

得 $\tau(A \to B) = \tau(B \to A) = 1$，于是对任意的赋值 v 有 $v(A) \le v(B)$，且 $v(B) \le v(A)$，则 $\overline{A} = \overline{B}$，所以 $\tau(A) = \tau(B)$。

命题 3.2 设 A, $B \in F(S)$，则

$$\rho(\neg A, \neg B) = \rho(A \vee B, A \wedge B) = \rho(A \to B, B \to A) = \rho(A,B).$$

证明 由命题3.1得

$$\begin{aligned}\rho(\neg A,\neg B)&=2-\tau(\neg A\to\neg B)-\tau(\neg B\to\neg A)\\&=2-\tau(B\to A)-\tau(A\to B)=\rho(A,B),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(A\vee B,A\wedge B)&=2-\tau(A\vee B\to A\wedge B)-\tau(A\wedge B\to A\vee B)\\&=2-\tau((A\to A)\wedge(A\to B)\wedge(B\to A)\wedge(B\to B))\\&\quad-\tau((A\to A)\vee(A\to B)\vee(B\to A)\vee(B\to B))\\&=1-\tau((A\to B)\wedge(B\to A))=\rho(A,B),\end{aligned}$$

$$\rho(A\to B,B\to A)\leq 2-\tau(A\to B)-\tau(B\to A)=\rho(A,B),$$

$$\begin{aligned}\rho(A\to B,B\to A)&\geq\tau((A\to B)\vee(B\to A))-\tau((A\to B)\wedge(B\to A))\\&=1-\tau((A\to B)\wedge(B\to A))=\rho(A,B),\end{aligned}$$

综上可得

$$\rho(\neg A,\neg B)=\rho(A\vee B,A\wedge B)=\rho(A\to B,B\to A)=\rho(A,B).$$

推论 3.3 设 $A,A_n\in F(S)\,(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\rho(A_n,A)=0,$$

当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\rho(\neg A_n,\neg A)=0.$$

命题 3.3 设 $A,\ B,\ C,\ D\in F(S)$，若 $A\approx B$，$C\approx D$，则 $\rho(A,C)=\rho(B,D)$。

证明 由 $A\approx B$，$C\approx D$ 得，$A\to C\approx B\to D$，$C\to A\approx D\to B$，因此

$$\rho(A,C)=1-\tau((A\to C)\wedge(C\to A))=1-\tau((B\to D)\wedge(D\to B))=\rho(B,D).$$

命题 3.4 设 $A,\ B\in F(S)$，则

(i) $\rho(A\wedge B,A)=1-\tau(A\to B)$；

(ii) $\rho(A\vee B,A)=1-\tau(B\to A)$；

(iii) $\rho(A\to B,B)=1-\tau((A\to B)\to B)\leq 1-\tau(A\vee B)$。

证明 命题3.4 (i) 的证明：由命题3.1得

$$\begin{aligned}\rho(A\wedge B,A)&=2-\tau(A\wedge B\to A)-\tau(A\to A\wedge B)\\&=2-\tau((A\to A)\vee(B\to A))-\tau((A\to A)\wedge(A\to B))\\&=1-\tau(A\to B).\end{aligned}$$

类似可证命题3.4 (ii)。

命题3.4 (iii) 的证明：$\rho(A\to B,B)=1-\tau(((A\to B)\to B)\wedge(B\to(A\to B)))$，因为 $B\to(A\to B)$ 为 $\mathscr{L}^*$ 中的定理，所以

$$\rho(A\to B,B)=1-\tau((A\to B)\to B)\leq 1-\tau(A\vee B).$$

命题3.5 设 $A, B, C \in F(S)$，则

(i) $\rho(A, B \vee C) \leq \rho(A, B) + \rho(A, C)$；

(ii) $\rho(A, B \wedge C) \leq \rho(A, B) + \rho(A, C)$。

证明 命题3.5 (i) 的证明如下

$$\begin{aligned}
\rho(A, B \vee C) &= 2 - \tau(A \to (B \vee C)) - \tau((B \vee C) \to A) \\
&= 2 - \tau((A \to B) \vee (A \to C)) - \tau((B \to A) \wedge (C \to A)) \\
&= 2 - \tau(A \to B) - \tau(A \to C) + \tau((A \to B) \wedge (A \to C)) \\
&\quad -\tau(B \to A) - \tau(C \to A) + \tau((B \to A) \vee (C \to A)) \\
&\leq 2 - \tau(A \to B) - \tau(B \to A) + 2 - \tau(A \to C) - \tau(C \to A) \\
&= \rho(A, B) + \rho(A, C).
\end{aligned}$$

类似可证命题3.5 (ii)。

命题3.6 设 $A, B, C \in F(S)$，则

(i) $\rho(A \wedge C, B \wedge C) \leq \rho(A, B)$；

(ii) $\rho(A \vee C, B \vee C) \leq \rho(A, B)$；

(iii) $\rho(A \to C, B \to C) \leq \rho(A, B)$；

(iv) $\rho(C \to A, C \to B) \leq \rho(A, B)$；

(v) $\rho(A \otimes C, B \otimes C) \leq \rho(A, B)$；

(vi) $\rho(A \oplus C, B \oplus C) \leq \rho(A, B)$。

证明 以 (i), (iii), (v) 为例证之，其余类似。

命题3.6 (i) 的证明如下

$$\begin{aligned}
&\rho(A \wedge C, B \wedge C) \\
= &\ 2 - \tau((A \wedge C) \to (B \wedge C)) - \tau((B \wedge C) \to (A \wedge C)) \\
= &\ 2 - \tau((A \wedge C \to B) \wedge (A \wedge C \to C)) - \tau((B \wedge C \to A) \wedge (B \wedge C \to C)),
\end{aligned}$$

由于 $A \wedge C \to C$ 是 $\mathscr{L}^*$ 中的定理，因此

$$\begin{aligned}
\rho(A \wedge C, B \wedge C) &= 2 - \tau((A \to B) \vee (C \to B)) - \tau((B \to A) \vee (C \to A)) \\
&\leq 2 - \tau(A \to B) - \tau(B \to A) = \rho(A, B).
\end{aligned}$$

命题3.6 (iii) 的证明如下

$$\begin{aligned}
&\rho(A \to C, B \to C) \\
= &\ 2 - \tau((A \to C) \to (B \to C)) - \tau((B \to C) \to (A \to C)) \\
= &\ 2 - \tau(B \to ((A \to C) \to C)) - \tau(A \to ((B \to C) \to C)) \\
\leq &\ 2 - \tau(B \to A \vee C) - \tau(A \to B \vee C) \\
\leq &\ 2 - \tau(B \to A) - \tau(A \to B) = \rho(A, B).
\end{aligned}$$

命题3.6(v)的证明如下

$$
\begin{aligned}
&\rho(A\otimes C,B\otimes C)\\
=\ &2-\tau((A\otimes C)\to(B\otimes C))-\tau((B\otimes C)\to(A\otimes C))\\
=\ &2-\tau(\neg(A\to\neg C)\to\neg(B\to\neg C))-\tau(\neg(B\to\neg C)\to\neg(A\to\neg C))\\
=\ &2-\tau((B\to\neg C)\to(A\to\neg C))-\tau((A\to\neg C)\to(B\to\neg C))\\
=\ &2-\tau(A\to((B\to\neg C)\to\neg C))-\tau(B\to((A\to\neg C)\to\neg C))\\
\le\ &2-\tau(A\to B\vee\neg C)-\tau(B\to A\vee\neg C)\\
\le\ &2-\tau(A\to B)-\tau(B\to A)=\rho(A,B).
\end{aligned}
$$

命题3.7　设A, B, C, $D\in F(S)$，则

(i) $\rho(A\vee C,B\vee D)\le\rho(A,B)+\rho(C,D)$；　(ii) $\rho(A\wedge C,B\wedge D)\le\rho(A,B)+\rho(C,D)$；

(iii) $\rho(A\to C,B\to D)\le\rho(A,B)+\rho(C,D)$；　(iv) $\rho(A\otimes C,B\otimes D)\le\rho(A,B)+\rho(C,D)$；

(v) $\rho(A\oplus C,B\oplus D)\le\rho(A,B)+\rho(C,D)$。

证明　命题3.7(i)的证明由定理3.1，命题3.6得

$$\rho(A\vee C,B\vee D)\le\rho(A\vee C,B\vee C)+\rho(B\vee C,B\vee D)\le\rho(A,B)+\rho(C,D).$$

类似可证命题3.7(ii)-(v)。

推论3.4　设A, B, A_n, $B_n\in F(S)\,(n=1,2,\cdots)$，若

$$\lim_{n\to\infty}\rho(A_n,A)=\lim_{n\to\infty}\rho(B_n,B)=0,$$

则

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(A_n\vee B_n,A\vee B)=0$。　(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(A_n\wedge B_n,A\wedge B)=0$。

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(A_n\to B_n,A\to B)=0$。　(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(A_n\otimes B_n,A\otimes B)=0$。

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(A_n\oplus B_n,A\oplus B)=0$。

由推论3.3，3.4可得如下重要定理：

定理3.2　在逻辑度量空间$(F(S),\rho)$中，一元运算“$\neg$”与二元运算“$\vee$”，“$\wedge$”，“$\to$”，“$\oplus$”，“$\otimes$”关于ρ都是连续的。

参考文献：

[1] 王国俊. 计量逻辑学(I)[J]. 工程数学学报，2006, 23(2): 191-215
Wang G J. Quantitative logic(I)[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(2): 191-215

[2] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 北京：科学出版社，2006
Wang G J. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle[M]. Beijing: Science Press, 2006

[3] 王国俊，傅丽，宋建社. 二值命题逻辑中命题的真度理论[J]. 中国科学(A辑)，2001, 31(11): 998-1008
Wang G J, Fu L, Song J S. Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic[J]. Science in China (Series A: Mathematics), 2002, 45(9): 1106-1116

[4] 王国俊，李壁镜. Lukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理[J]. 中国科学(E辑)，2005, 35(6): 561-569
Wang G J, Li B J. Theory of truth degrees of formulas in Lukasiewicz n-valued propositional logic and a limit theorem[J]. Science in China (Series E: Information Sciences), 2005, 48(6): 727-736

[5] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京：科学出版社，2008
Wang G J. Non-classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning[M]. Beijing: Science Press, 2008
[6] 崔美华，徐罗山，周纯阳. 逻辑系统Luk中命题积分真度的若干等式与不等式[J]. 模糊系统与数学，2009, 32(5): 21-26
Cui M H, Xu L S, Zhou C Y. Some equalities and inequalities about integration truth degrees of formulae in the logic system Łuk[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2009, 32(5): 21-26

The Integral Truth Degree and Pseudo-distance of Formulas in the Fuzzy Logic System

CUI Mei-hua

(School of Mathematical Sciences, Yancheng Normal College, Yancheng 224051)

Abstract: In the fuzzy logic system $\mathscr{L}^*$ with value lattice $[0,1]$, we study the integral truth degree and pseudo-distance of formulas by using properties of the order structure and the evaluation function. Several properties of the integral truth degree and the pseudo-distance are deduced. Furthermore, we prove that the logical operations are continuous with respect to the pseudo-distance in the logic metric space. The proposed method avoids the complicated calculations of n multiple integral. The results can be used to simply calculate or reasonably estimate the values of the integral truth degree and pseudo-distance of formulas. Besides, they also broaden the mind for studying the divergence, compatibility and approximate reasoning of the logic metric space theory.

Keywords: logic system $\mathscr{L}^*$; formulas; integral truth degree; pseudo-distance

Received: 31 May 2009. **Accepted:** 21 Apr 2010.
Foundation item: The Natural Science Foundation of Jiangsu University Education Section (08KJD110008).